الاشتقاق

أنشطة تمهيدية

نشاط1 قابلية الاشتقاق في نقطة :

أحسب $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ في الحالات التالية:

1) $f(x)=x^2$ و $x_0=5$

2) $f(x)=3x^2-2x$ و $x_0=-1$

3 $f(x)=\sqrt{2x+1}$ و $x_0=\dfrac{1}{2}$

4) $f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{x+2}$ و $x_0=-1$

5) $f(x)=\dfrac{2x+1}{3x-2}$ و $x_0=1$

6) $f(x)=\sin x$ و $x_0=\dfrac{\pi}{2}$

7) $\begin{cases} f(x)=x^2.\sin(\dfrac{1}{x}) & x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$ و $x_0=0$

نلاحظ أن هذه النهايات كلها تعطينا عددا ثابثا .

نقول بأن هذه الدوال قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 والعدد : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ يسمى العدد المشتق في النقطة x_0 نرمز له ب: $f'(x_0)$.

نشاط2 قابلية الاشتقاق على اليمين – على اليسار

أحسب $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ في الحالات التالية :

1) $f(x)=|x^2-2x|$ و $x_0=0$

2) $f(x)=(x-2)\sqrt{x-2}$ و $x_0=2$

3) $f(x)=|x+3|$ و $x_0=-3$

نلاحظ أن هذه النهايات كلها تعطينا عددا ثابثا .

نقول بأن هذه الدوال قابلة للاشتقاق على اليمين في النقطة x_0 والعدد : $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ يسمى العدد المشتق على اليمين في النقطة x_0 نرمز له ب: $f'_d(x_0)$.

أحسب: $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ في الحالات التالية :

1) $f(x)=2|x-2|+3x$ و $x_0=2$

2) $f(x)=|\sin x-\tan x|$ و $x_0=0$

3) $\begin{cases} f(x)=2x & x\geq 1 \\ f(x)=3-x & x\prec 1 \end{cases}$ و $x_0=1$

نلاحظ أن هذه النهايات كلها تعطينا عددا ثابثا

نقول بأن هذه الدوال قابلة للاشتقاق على اليسار في النقطة x_0 والعدد : $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

يسمى العدد المشتق على اليسار في النقطة x_0 نرمز له ب: $f'_g(x_0)$.

نشاط 3

بين ان الدوال التالية غير قابلة للاشتقاق في النقطة x_0

1) $f(x)=|x-3|$ و $x_0=3$

2) $g(x)=x.\sin(\frac{1}{x}) \quad x\neq 0$ ، $g(0)=0$ و $x_0=0$

3) $f(x)=\sqrt{x-2}$ و $x_0=2$

4) $h(x)=x+1-\sqrt{x^2-1} \quad x\in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$ ، $h(x)=\sqrt{1-x^2} \quad x\in]-1,1[$ و $x_0=1$ أو $x_0=-1$

نشاط4 تقريب دالة بدالة تآلفية

نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x)=x^2$

1) أحسب $f(1+h)$ بالنسبة ل $h\in IR$

2) أتمم ملء الجدول التالي:

x	0	0.8	0.99	1	1.01	1.1	2
f(x)	0			1			4
2x-1	-1			1			3

3) أرسم منحنى الدالة f والمستقيم (T) ذو معادلة : $y=2x-1$ على المجال $[1,2]$

المستقيم (T) يسمى المماس للمنحنى في النقطة $M_0(x_0, f(x_0))$
العدد 2 هو العدد المشتق للدالة f في النقطة $x_0 = 1$
الدالة $x \mapsto 2x-1$ تسمى الدالة التآلقية المماسة للدالة f في النقطة $x_0 = 1$

نشاط 5

نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x) = \sqrt{1+x}$

1) أحسب النهاية : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - 1 - \frac{1}{2}x}{x}$

2) نضع : $g(x) = \dfrac{f(x) - 1 - \frac{1}{2}x}{x}$ بين أن : $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$

3) بين أن: $\forall x \in [-1,0[\cup]0,+\infty[\; : f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + x.g(x)$

4) اتمم ملء الجدول التالي:

x	0.2	0.1	0.01	-0.01	-0.1
f(x)	1.095	1.048			
$1+\frac{1}{2}.x$		1.05		0.995	0.95

5) تحقق أن : $\forall x \in [-1,0[\cup]0,+\infty[\; : f(x) = f(0) + \frac{1}{2}(x-0) + x.g(x)$ وأن العدد المشتق للدالة f في النقطة 0 هو $f'(0) = \frac{1}{2}$

نشاط 6

نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x) = \dfrac{1}{x}$

1) بين أن $\forall h \in]-1,1[\; : f(1+h) = 1 - h + \dfrac{h^2}{1+h}$

2) اتمم ملء الجدول التالي:

h	-0.3	-0.1	-0.01	0.01	0.1
$\frac{h^2}{1+h}$	0.128		0.0001		
1-h	1.03			0.99	

2) أرسم منحنى الدالة f والمستقيم (T) ذو معادلة : $y = -x+2$ على المجال $[0,2]$.ماذا تلاحظ؟

خلاصة الدرس

1) الاشتقاق في نقطة

أ- تعريف:

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0
نقول بأن الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 إذا وفقط إذا كانت الدالة g المعرفة ب:
$g(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ تقبل نهاية منتهية l عندما يؤول x إلى x_0
العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f في النقطة x_0 نرمز له ب: $f'(x_0)$

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 وإذا وضعنا $g(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ فان:

$f(x)=f(x_0)+l(x-x_0)+(x-x_0)g(x)$ مع : $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$

و إذا وضعنا $x=x_0+h$ فان: $f(x_0+h)=f(x_0)+l.h+h.\varphi(h)$ مع: $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)=0$

الدالة : $x\mapsto f(x_0)+l.(x-x_0)$ تسمى الدالة التآلفية المماسة للدالة f في النقطة x_0.
هذه الدالة تمكننا من إعطاء قيم تقريبية ل $f(x)$ بجوار النقطة x_0 .
من خلال الأنشطة يمكننا كتابة $x^2\approx 2x-1$ بجوار1

و $\sqrt{1+x}\simeq 1+\frac{x}{2}$ بجوار0 و $\frac{1}{x}\simeq 2-x$ بجوار1 أو $\frac{1}{1+x}\simeq 1-x$

أمثلة :

1- نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x)=5x^3-2x^2$ و $x_0=2$

لدينا:

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{5.(2+h)^3-2.(2+h)^2-32}{h}=$$

$$\frac{40+60h+30h^2+5h^3-8-8h-2h^2-32}{h}=5h^2+28h+52$$

إذن : $f(2+h)=f(2)+52h+h.(28h+5h^2)$ نضع: $\varphi(h)=28h+5h^2$ لدينا: $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)=0$
وبالتالي الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة $x_0=2$ والعدد المشتق للدالة f في النقطة 2 هو:
$f'(2)=52$
الدالة التآلفية المماسة للدالة f في النقطة 2هي : $x\mapsto 32+52.(x-2)$.

2- نعتبر ادالة f المعرفة على IR ب: $f(x)=|x|$

لدينا: $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-1$

اذن الدالة $g:x\mapsto\frac{f(x)-f(0)}{x}$ لا تقبل نهاية في 0 ومنه فالدالة f غير قابلة للاشتقاق في النقطة0

ب - تأويل هندسي

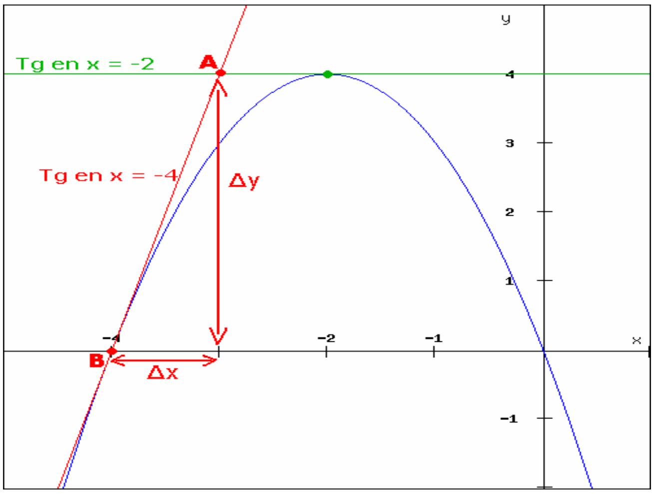
C_f يرمز لمنحنى الدالة f .

نعتبر النقطتين $A(x_0, f(x_0))$ و $M(x, f(x))$ لدينا $g(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ لكل $x \neq x_0$

يمثل المعامل الموجه للمستقيم (AM) . لما يقترب x من x_0 فان النقطة M تقترب من النقطة A والمعامل الموجه للمستقيم (AM) يؤول الى $l = f'(x_0)$. نقول بان المستقيم (T) المار من A والذي معامله الموجه هو l هو المستقيم المماس للمنحنى (C_f) في النقطة A.

معادلة ديكارتية للمماس (T) هي اذن: $\boxed{y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)}$.

الشكل



ج - الدالة التآلفية المماسة

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في النقطة x_0
الدالة المعرفة على IR ب: $u : x \mapsto f(x_0)+(x-x_0).f'(x_0)$ تسمى الدالة التآلفية المماسة للدالة f في النقطة x_0. بجوار x_0 $u(x)$ يعطينا تقريبا ل $f(x)$ نكتب: $f(x) \simeq f(x_0)+f'(x_0).(x-x_0)$
مثال: $f(x)=(1+x)^3$ انطلاقا من منحنى الدالة $g : x \mapsto x^3$ يمكن رسم منحنى الدالة f لأن $\forall x \in IR : f(x) = g(x+1)$) باعتبار الازاحة ذات المتجهة $\vec{u}=\vec{i}$)

لدينا: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \lim \dfrac{(1+x)^3-1}{x} = \lim \dfrac{1+3x^2+3x+x^3-1}{x}$ الشكل:

$= \lim\limits_{x\to 0} 3+3x+3x^2 = 3$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة 0 و $f'(0)=3$ وبالتالي بجوار 0 لدينا: $(1+x)^3 \simeq 1+3x$

2) الاشتقاق على اليمين – الاشتقاق على اليسار

أ- تعريف :

لتكن f دالة معرفة على مجال من نوع $[x_0, a[$.

نقول بأن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في النقطة x_0 إذا كانت النسبة : $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

تقبل نهاية منتهية على اليمين في النقطة x_0.

هذه النهاية تسمى العدد المشتق على اليمين في النقطة x_0 نرمز له ب: $f'_d(x_0)$

ولدينا : $f'_d(x_0) = \lim \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

لتكن f دالة معرفة على مجال من نوع $]b, x_0]$.

نقول بأن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليسار في النقطة x_0 إذا كانت النسبة : $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

تقبل نهاية منتهية على اليسار في النقطة x_0.

هذه النهاية تسمى العدد المشتق على اليسار في النقطة x_0 نرمز له ب: $f'_g(x_0)$

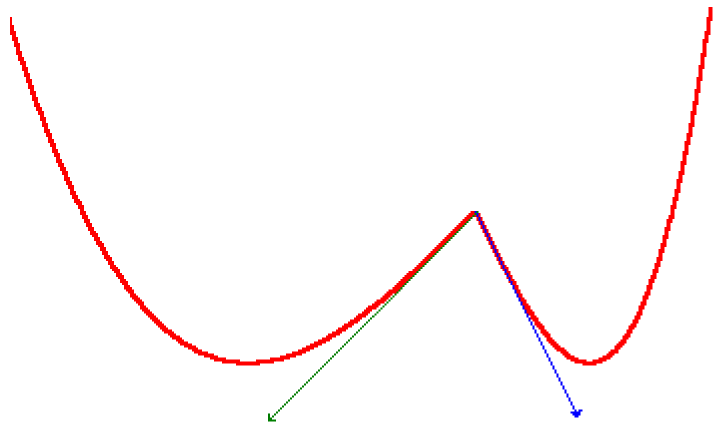
ولدينا : $f'_g(x_0) = \lim \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

ب- تأويل هندسي

C_f يرمز لمنحنى الدالة f.

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين (أو على اليسار) في النقطة x_0

فان المنحنى يقبل نصف مماس في النقطة $A(x_0, f(x_0))$ معامله الموجه هو : $f'_d(x_0)$ (أو $(f'_g(x_0))$.



Courbe qui admet deux demi-tangentes

ملاحظة:

تكون دالة f قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 إذا وفقط إذا كانت قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار في النقطة x_0 وكان لدينا : $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

أمثلة:

1- نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x) = x^2 + |x|$

لدينا: $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2 + x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} x + 1 = 1$

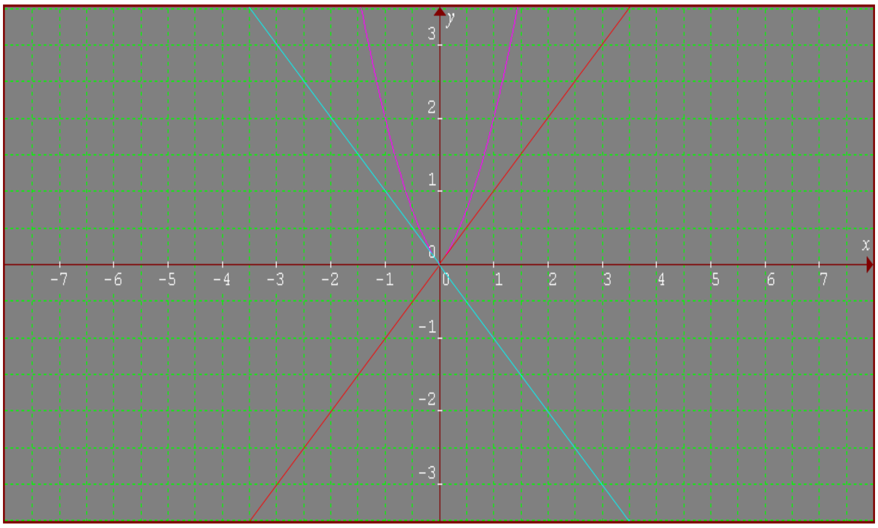
و $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim \frac{x^2 - x}{x} = \lim x - 1 = -1$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين و على اليسار في النقطة 0

ولكنها غير قابلة للاشتقاق في النقطة 0 ولدينا : $f'_d(0) = 1$ و $f'_g(0) = -1$

النقطة $O(0, f(0))$ تسمى نقطة مزواة لأن النصفي مماسين للمنحنى في هذه النقطة يكونان زاوية غير مستقيمية.

الشكل:



2- نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x) = |x^2 - 1|$

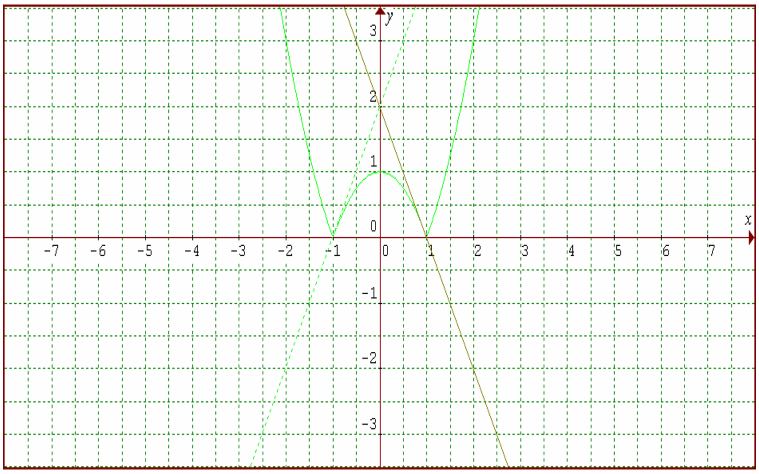
لندرس قابلة اشتقاق الدالة في النقطة -1 :

لدينا : $\lim\limits_{x \to -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^+} \frac{1 - x^2 - 0}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^+} 1 - x = 2$

و $\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^-} \frac{x^2 - 1 - 0}{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^-} x - 1 = -2$

اذن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار في النقطة -1 ولكنها غير قابلة للاشتقاق في النقطة -1 لدينا إذن نقطة مزواة $A(-1,0)$. وبما أن الدالة زوجية فيمكن أن نقول بان النقطة $B(1,0)$ هي أيضا نقطة مزواة.

الشكل:



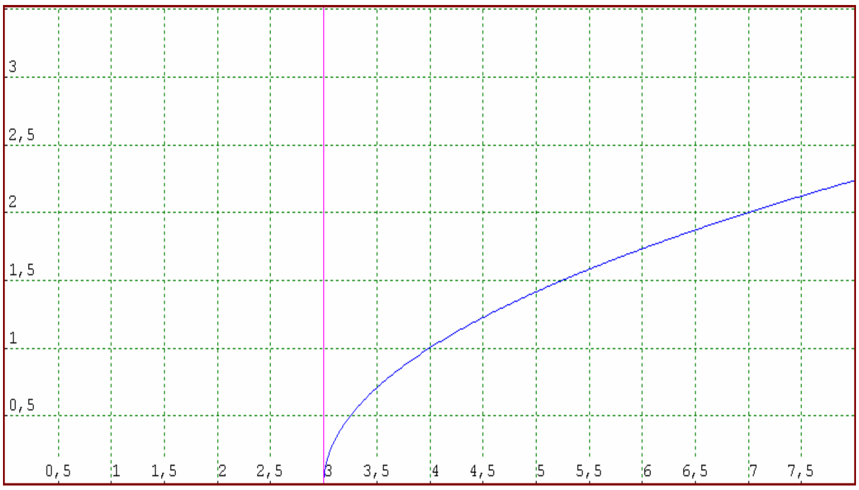
3- نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x)=\sqrt{x-3}$

لدينا مجموعة تعريف الدالة f هي : $D_f=[3,+\infty[$

و : $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\dfrac{\sqrt{x-3}-0}{x-3}=\lim\dfrac{\sqrt{x-3}}{(\sqrt{x-3})^2}=\lim\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}=+\infty$

اذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في النقطة 3 .والمنحنى يقبل نصف مماس عمودي في النقطة $A(3,0)$.

الشكل:



3) الدالة المشتقة

أ- المشتقة الأولى

تعريف1

نقول بان دالة f قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح $I=]a,b[$ إذا كانت قابلة للاشتقاق في كل نقطة من I

تعريف2

نقول بان دالة f قابلة للاشتقاق على مجال مغلق $I=[a,b]$ إذا كانت قابلة للاشتقاق على المجال المفتوح $]a,b[$ وكانت قابلة للاشتقاق على اليمين في a وعلى اليسار في b.

وبنفس الطريقة نعرف الاشتقاق على مجال شبه مفتوح .

تعريف3

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I.

الدالة المعرفة على I بما يلي : $x \mapsto f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة للدالة f نرمز لها ب: f'

أمثلة:

1- نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x)=x^2$

لدينا لكل x_0 من IR : $\lim \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim \dfrac{x^2-{x_0}^2}{x-x_0} = \lim x+x_0 = 2x_0$

اذن f قابلة للاشتقاق على IR والدالة المشتقة للدالة f هي الدالة : $f':x \mapsto 2x$

2- نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x)=\sqrt{x+3}$

لدينا : لكل x_0 من $]-3,+\infty[$: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{x_0+3}}{x-x_0} = \lim \dfrac{(\sqrt{x+3})^2-(\sqrt{x_0+3})^2}{(x-x_0).(\sqrt{x+3}+\sqrt{x_0+3})}$

$$= \lim \frac{x-x_0}{(x-x_0).(\sqrt{x+3}+\sqrt{x_0+3})} = \lim \frac{1}{(\sqrt{x+3}+\sqrt{x_0+3})} = \frac{1}{2.\sqrt{x_0+3}}$$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-3,+\infty[$ والدالة المشتقة للدالة f هي الدالة : $f':x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$

ب- المشتقة الثانية :

تعريف:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I اذا كانت الدالة المشتقة f' قابلة للاشتقاق على I فان دالتها المشتقة تسمى الدالة المشتقة الثانية نرمز لها ب: f''

أمثلة

1- $f(x)=x^2$ لدينا $f'(x)=2x$ و $\lim \dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} = \lim \dfrac{2x-2x_0}{x-x_0} = 2$

إذن المشتقة الثانية للدالة f هي الدالة : $f'':x\mapsto 2$

-2 $f(x)=\sin x$

لدينا : $\lim \frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}=\lim \frac{2\sin(\frac{x-x_0}{2}).\cos(\frac{x+x_0}{2})}{x-x_0}=\lim \frac{2\sin(\frac{x-x_0}{2}).\cos(\frac{x+x_0}{2})}{2.(\frac{x-x_0}{2})}=\cos x_0$

لأن : $\lim \frac{\sin\frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}}=1$ و $\lim\cos\frac{x+x_0}{2}=\cos x_0$

ولدينا أيضا: $\lim \frac{\cos x-\cos x_0}{x-x_0}=\frac{-2\sin(\frac{x-x_0}{2}).\sin(\frac{x+x_0}{2})}{2.\frac{x-x_0}{2}}=-2\sin x_0$

إذن f' قابلة للاشتقاق على IR والدالة المشتقة الثانية معرفة على IR ب: $f'':x\mapsto -2\sin x$

ج- <u>المشتقات المتتالية</u>

نضع: $f^{(0)}=f$ و $f^{(1)}=f'$ $f^{(2)}=f''$ واذا كانت f قابلة للاشتقاق n مرة

نضع: $f^{(n)}=(f^{(n-1)})'$

هذه الدوال تسمى المشتقات المتتالية للدالة f

أمثلة:

1) $f(x)=x^6$

لدينا: $f'(x)=6.x^5$ و $f''(x)=6.5.x^4$ و $f^{(3)}(x)=6.5.4.x^3$ و...... $f^{(6)}(x)=6.5.4.3.2.1=6!$

واذاكان $n\geq 7$ فان: $f^{(n)}(x)=0$

2) $f(x)=\sin x$

لدينا : $f'(x)=\cos x$ و $f''(x)=-\sin x$.

لنبين أن : $\forall n\in IN:\ f^{(n)}(x)=.\sin(x+n.\frac{\pi}{2})$

نبرهن على ذلك بالترجع :

من اجل $n=0$ لدينا $f^{(0)}(x)=f(x)=\sin(x+0.\frac{\pi}{2})$ و من أجل $n=1$ لدينا :

$f^{(1)}(x)=f'(x)=\cos x=\sin(x+1.\frac{\pi}{2})$ اذن الخاصية محققة بالنسبة ل $n=0$ و $n=1$

لنفرض ان الخاصية محققة بالنسبة ل $p\in IN$

لدينا: $f^{(p+1)}(x)=(f^{(p)})'(x)=\sin'(x+p\frac{\pi}{2})=\cos(x+p\frac{\pi}{2})=\sin(x+p\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2})=\sin(x+(p+1)\frac{\pi}{2})$

اذن الخاصية محققة بالنسبة ل: $p+1$

وبالتالي : $\forall n\in IN:\ f^{(n)}(x)=\sin(x+n.\frac{\pi}{2})$

4) العمليات على الدوال المشتقة

أ- **مبرهنة:**

لتكن f و g دالتان قابلتان للاشتقاق في النقطة x_0 و λ عدد حقيقي

لدينا:

1- الدالة $f+g$ قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 و :

$$\boxed{(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)}$$

2- الدالة λf قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 و :

$$\boxed{(\lambda f)'(x_0)=\lambda.f'(x_0)}$$

3- الدالة $f\times g$ قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 و :

$$\boxed{(f\times g)'(x_0)=f'(x_0).g(x_0)+f(x_0).g'(x_0)}$$

4- اذا كانت الدالة g لا تنعدم في x_0 فان $\frac{1}{g}$ قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 و :

$$\boxed{(\frac{1}{g})'(x_0)=-\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}}$$

5- اذا كانت الدالة g لا تنعدم في x_0 فان: $\frac{f}{g}$ قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 و :

$$\boxed{(\frac{f}{g})'(x_0)=\frac{f'(x_0).g(x_0)-g'(x_0).f(x_0)}{(g(x_0))^2}}$$

<u>برهان</u> : 1- لدينا:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\lim\frac{f(x)-f(x_0)+g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\lim\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0)$$

2- $$\lim\frac{(\lambda f)(x)-(\lambda f)(x_0)}{x-x_0}=\lim\frac{\lambda.f(x)-\lambda.f(x_0)}{x-x_0}=\lim\frac{\lambda.(f(x)-f(x_0))}{x-x_0}=\lambda.f'(x_0)$$

3- $$\lim\frac{(f\times g)(x)-(f\times g)(x_0)}{x-x_0}=\lim\frac{f(x).g(x)-f(x_0).g(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim\frac{f(x)g(x)-f(x_0).g(x)+f(x_0).g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$

$$=\lim\frac{g(x).(f(x)-f(x_0))-f(x)(g(x)-g(x_0))}{x-x_0}=\frac{f'(x_0).g(x_0)-f(x_0).g'(x_0)}{(g(x_0))^2}-$$

4- $$\lim\frac{(\frac{1}{g})(x)-(\frac{1}{g})(x_0)}{x-x_0}=\lim\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_0)}}{x-x_0}=\lim\frac{\frac{g(x_0)-g(x)}{g(x).g(x_0)}}{x-x_0}=\lim\frac{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}{g(x).g(x_0)}=-\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

-5

$$\frac{...(x_0)}{...(x_0)} = \lim \frac{\frac{f(x).g(x_0)-g(x).f(x_0)}{g(x).g(x_0)}}{x-x_0} = \lim \frac{g(x).\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f(x).\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}{g(x).g(x_0)} = \frac{f'(x_0).g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

ب- <u>مشتقة مركبة دالتين</u>

نقبل المبرهنتين:

<u>مبرهنة 1</u>

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 و و عددين حقيقيين

لدينا: الدالة g المعرفة ب: $g(x)=f(ax+b)$ دالة قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 و:

$$\boxed{g'(x_0)=a.f'(ax_0+b)}$$

<u>مبرهنة2</u>

لتكن f دالة معرفة وموجبة قطعا على مجال I لدينا : الدالة $\sqrt{f}$ دالة قابلة للاشتقاق في النقطة x_0

و $\boxed{(\sqrt{f})'(x_0)=\frac{f'(x_0)}{2.\sqrt{f(x_0)}}}$

مبرهنة3

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 و n عدد صحيح طبيعي غير منعدم

لدينا الدالة $u:x\mapsto(f(x))^n$ دالة قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 و $\boxed{u'(x_0)=n.(f(x_0))^{n-1}.f'(x_0)}$

ج- الدوال المشتقة للدوال الاعتيادية:

* الدالة الثابثة: $f:x\mapsto a$ حيث: $a\in IR$

لدينا: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$ اذن : $\forall x\in IR:\quad f'(x)=0$

* الدالة التآلفية: $f:x\mapsto ax+b$ حيث: $(a,b)\in IR^2$

لدينا: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\frac{ax+b-ax_0-b}{x-x_0}=\lim\frac{a(x-x_0)}{x-x_0}=a$

اذن : $\forall x\in IR:\quad f'(x)=a$

* الدالة : $f:x\mapsto x^n$ حيث: $n\in IN^*$

لدينا:

$$\lim \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}x- = \lim\frac{x^n-x_0{}^n}{x-x_0}=\lim\frac{(x-x_0)(x^{n-1}+x^{n-2}.x_0+....+x.x_0{}^{n-2}+x_0{}^{n-1})}{x-x_0}=$$

$$\lim_{x \to x_0} x^{n-1} + x^{n-2}.x_0 + ... + x.x_0{}^{n-2} + x_0{}^{n-1} = n.x_0{}^{n-1}$$

اذن: $\boxed{\forall x \in IR : \ f'(x) = n.x^{n-1}}$

* الدالة $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$

لدينا لكل x_0 من IR^* :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim \frac{x_0 - x}{(x - x_0).(x.x_0)} = \lim \frac{-1}{x.x_0} = \frac{-1}{x_0{}^2}$$

اذن : $\forall x \in IR^* : f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$

*الدالة : $f : x \mapsto x^p$ حيث : $p \in \mathbb{Z}$

لدينا $\exists n \in IN^* / p = -n$ و : $\forall x \in IR^* : f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ اذن:

$$\forall x \in IR^* : f'(x) = \frac{-n.x^{n-1}}{(x^n)^2} = \frac{-n.x^{n-1}}{x^{2n}} = \frac{-n}{x^{n+1}} = (-n).x^{-n-1} = p.x^{p-1}$$

* الدالة : $f : x \mapsto \sqrt{x}$

أمثلة : 1) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

$$\forall x \in IR : \ f'(x) = \frac{2x}{2.\sqrt{1 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

2) $f(x) = (x^2 - 2x + 3)^5$

$$\forall x \in IR : \ f'(x) = 5.(x^2 - 2x + 3).(2x - 2) = 10.(x - 1)(x^2 - 2x + 3)$$

3) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

$$\forall x \in IR \setminus \{1\} : \ f'(x) = \frac{3x^2(x-1)^2 - 2.(x-1).x^3}{(x-1)^4} = \frac{3x^2(x-1) - 2x^3}{(x-1)^3} = \frac{x^2(3x - 3 - 2x)}{(x-1)^3} = \frac{x^2.(x-3)}{(x-1)^3}$$

4) $f(x) = \dfrac{1}{(1+2x)^2}$

$$\forall x \in IR \setminus \{\frac{-1}{2}\} : \ f'(x) = \frac{-2(1+2x).2}{(1+2x)^4} = \frac{-4(1+2x)}{(1+2x)^4} = \frac{-4}{(1+2x)^3}$$

5) الدالة المشتقة : تطبيقات

أ- قابلية الاشتقاق ومطارف دالة

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح I و $x_0 \in I$

إذا كانت الدالة f تقبل قيمة قصوية عند النقطة x_0 فانه يوجد مجال مفتوح J ضمن I و $x_0 \in J$

بحيث: $\forall x \in J : f(x) \leq f(x_0)$

إذن : $\forall x \in J \quad x \succ x_0 \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$ و $\forall x \in J \quad x \prec x_0 \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$

إذن إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 فان: $f'_d(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$

و $f'_g(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ وبما ان : $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$ فان: $\boxed{f'(x_0) = 0}$

ونفس الشيء إذا كانت الدالة f تقبل قيمة دنوية عند النقطة x_0

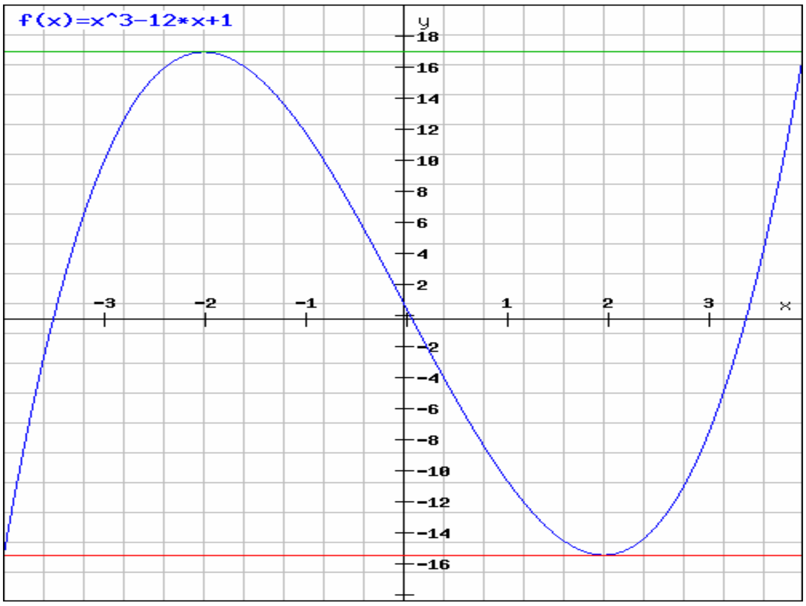
مبرهنة:

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 وكانت تقبل مطرا فا عند هذه النقطة فان:
$f'(x_0) = 0$

تأويل هندسي:

إذا كانت دالة f تقبل مطرافا نسبيا أو مطلقا عند x_0 وكانت قابلة للاشتقاق في x_0 فان المنحنى الممثل للدالة يقبل مماسا موازيا لمحور الأفاصيل في النقطة : $A(x_0, f(x_0))$

الشكل



ملاحظة: عكس المبرهنة غير صحيح
الدالة f المعرفة ب: $f(x)=x^3$ تحقق : $f'(0)=0$ ولكنها لا تقبل مطرا فا في 0

ب- قابلية الاشتقاق وتغيرات دالة

سبق لنا أن تطرقنا لدراسة تغيرات دالة عددية في درس العموميات وقد استعملنا آنذاك معدل تغير دالة
بيد أن الصعوبة كانت تكمن في تحديد إشارة معدل التغير الذي يتضمن متغيرين .
سنرى فيما ياي أهمية الدالة المشتقة في تحديد التغيرات

مبرهنة1

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I

- إذا كانت f ثابتة على I فان : الدالة المشتقة f' منعدمة على I.
- إذا كانت f تزايدية على I فان : الدالة المشتقة f' موجبة على I.
- إذا كانت f تناقصية على I فان : الدالة المشتقة f' سالبة على I.

عكس هذه المبرهنة هو الأكثر استعمالا في دراسة تغيرات الدوال هي مبرهنة مقبولة

مبرهنة 2

* إذا كانت f' منعدمة على I فان : f دالة ثابتة على I
* إذا كانت f' موجبة قطعا على I (ما عدا في بعض النقط) فان : f دالة تزايدية على I.

* إذا كانت f' سالبة قطعا على I (ما عدا في بعض النقط) فان : f دالة تناقصية على I

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x)=2.x^3-3.x^2$
لدينا f قابلة للاشتقاق على IR لأنها دالة حدودية .
ولدينا : $\forall x\in IR: f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$ إذن :

* $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ أو $x=1$

* $f'(x)\le 0 \Leftrightarrow x\in[0,1]$

إذن f تناقصية على المجال $[0,1]$ وتزايدية على كل من المجالين: $]-\infty,0]$ و $[1,+\infty[$

وبالتالي : جدول تغيرات f يكون كالتالي:

بعد حساب: $f(0)=0$ **و** $f(1)=-1$

و $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim 2.x^3=+\infty$ **و** $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

X	0 1 $+\infty$ $-\infty$
$f'(x)$	
$f(x)$	

6) المعادلة التفاضلية: $y''+\omega^2.y=0$

بعض الظواهر الطبيعية أو الفيزيائية تؤدي في دراستها الى معالجة معادلات يكون المجهول فيها هو عبارة عن دالة لمتغير حقيقي كالزمن مثلا أو المسافة نرمزلها ب y .

وهذه المعادلة تكون عبارة عن علاقة تربط دالة y بمشتقاتها المتوالية y' و y'' ... تسمى معادلة تفاضلية .سنتطرق في هذه الفقرة للمعادلة التفاضلية التي هي واحدة من بين المعادلات التفاضلية الخطية من الدرجة الثانية بمعاملات ثابتة.

لتكن f حلا للمعادلة التفاضلية $y''+\omega^2.y=0$ اذن الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين و $f''=-\omega^2.f$

هذه الخاصية تذكرنا بالدوال المثلثية $\cos$ و $\sin$

لأنه إذا اعتبرنا $f(x)=\cos(ax+b)$ فان: $f'(x)=-a\sin(ax+b)$ و $f''(x)=-a^2.\cos(ax+b)=-a^2.f(x)$

نقبل المبرهنة التالية

<u>مبرهنة</u>

حلول المعادلة التفاضلية : $y''+\omega^2.y=0$ هي الدوال y التي تحقق : $y(x)=\lambda.\cos(\omega x+\varphi)$

حيث $(\lambda,\varphi)\in IR^2$